

27 ноября 2025 г.

№ _____

9-07

Олимпиадная работа
по математике
ученика 9 класса
МОБУ "ООШ №5"
Барышева Гордея Леонидовича
Изубилина Антошина Александровича

№5

9-07

Чтобы было проще введем обозначения
 Г - голубые бушны
 Z - зеленые } $30 (G + Z)$

1) $30 - 26 = 4$ (не имеют голубой соседней бушны \Rightarrow у и бушны оба соседа зеленые)
 2) $30 - 20 = 10$ (не имеют зеленого соседа) \Rightarrow

у 10 бушны оба соседа голубые

Введем доп. обозначения: Пусть n_{22} - кол-во

пар 22, n_{23} - кол-во пар 2 и 3, n_{33} - кол-во

пар 3 и 3, а в общем 30 пар

1) $G = n_{22} + \frac{1}{2} n_{23}$

$Z = n_{33} + \frac{1}{2} n_{23}$

$G + Z = n_{22} + n_{23} + n_{33} = 30$

$n_{22} = 10 \quad n_{33} = 4$

$10 + n_{23} + 4 = 30$

$n_{23} = 16$

2) $G = 10 + \frac{1}{2} \cdot 16 = 18$

$Z = 4 + \frac{1}{2} \cdot 16 = 12$

Ответ: 18 голубых бушны было

№и 4

Максимальное кол-во не красных шариков может быть 2

Макс. кол-во не синих шариков может быть 2

Введем обозначения: пусть n_k - крайние; n_c - синие; n_{gr} - другие

$n_c + n_{gr} \leq 2$

$n_k + n_{gr} \leq 2$

$n_k, n_c, n_{gr} \geq 0$, то n_{gr} может быть 0, 1, 2, ...

если $n_{gr} \geq 1$, то $n_c \leq 1$ и $n_k \leq 1$

$n_k + n_c + n_{gr} \leq 1 + 1 + 2$

$n_k + n_c + n_{gr} \leq 4$

Если $n_{gr} = 0$, то $n_c \leq 2$ и $n_k \leq 2$

$n_k + n_c \leq 4$

Ответ: в коробке может быть 4 шарика

- 1 0
- 2 3
- 3 5
- 4 4
- 5 6

Краски 00

№1

9-07

$2^{39} + 2^9 = 2^9(2^{30} + 1)$ - при разложении
 100 разложим на 25 и 4, так $25 \cdot 4 = 100$

Док-тв: $2^9(2^{30} + 1)$ делится на 100

1) $2^9 = 512$

Оно делится на 4: $512 : 4 = 128 \Rightarrow$

$2^9(2^{30} + 1)$ тоже делится на 4.

2) Разберем $(2^{30} + 1)$ через 25

$2^{5 \cdot 6} = 2^6 = 1$ (модуль 5)

$16 = 1$ (модуль 5)

$2^{10} = 1024$

$1024 : 25 = 40$

$2^{10} = 24$ (и 25 модуль)

$24 = -1$ (и модуль 25), $\Rightarrow 2^{10} = -1$ (модуль 25)

$(2^{10})^3 = -1$ (модуль 25)

$2^{30} = -1$ (модуль 25)

$2^{30} + 1 = -1 + 1$ (модуль 25)

$2^{30} + 1 = 0$ (модуль 25) $\Rightarrow 2^{30} + 1$ делится на 25

3) Так $2^9(2^{30} + 1)$ делится на 4 и на 25 \Rightarrow

$2^9(2^{30} + 1)$ делится на 100, а значит

$2^{39} + 2^9$ делится на 100.

ч.т.д.

№2

$(ab + cd)^2 = a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2$

$a^2 + b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 1 \cdot 1 = 1$

$a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2 = 1$

$a^2c^2 + b^2d^2 = (ac^2 + bd^2)^2$

Примем $ab + cd$ за x , тогда:

$x^2 = a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2$

$a^2d^2 + b^2c^2 = 1 + 2abcd$

$x^2 = (a^2b^2 + c^2d^2) + 2abcd = (1 + 2abcd) + 2abcd = 1 + 4abcd$

$ac + bd = 0$

$(ac)^2 + (bd)^2 = -2abcd \Rightarrow a^2c^2 + b^2d^2 = -2abcd$

~~$2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 = 1$~~ $-2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 = 1$

$x^2 = 1 + 4abcd$, а из $a^2c^2 + b^2d^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$ следует, что

$4abcd = -2(a^2c^2 + b^2d^2)$

$x^2 = 1 - 2(a^2c^2 + b^2d^2)$

\rightarrow см. далее

Продолжение №2

9-07

из $a^2 + b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$:

$$a^2 + c^2 + b^2 d^2 \leq \frac{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 \geq 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

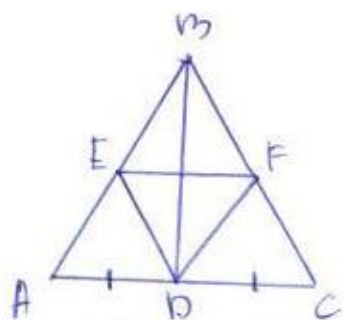
$$x = 0$$

Ответ: 0

3

5

№3



Дано: $\triangle ABC$; D - середина AC
 $DE \perp AB$
 $DF \perp BC$
 $BD \cap EF = M$
 Док-ть: $DM = \frac{1}{2} EF$

Док-во

1) Рассмотрим $\triangle ABD$; в нем $DE \perp AB$, а по $\angle D$ биссектрисе:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DB}$$

В $\triangle CBD$ $DF \perp BC$, так же по $\angle D$ биссектрисе: $\frac{CF}{FB} = \frac{CD}{DB}$

$$\text{Тк } D \text{ - середина } AC \Rightarrow AD = CD \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DB} = \frac{CD}{DB} = \frac{CF}{FB} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FB} \Rightarrow AC \parallel EF$$

2) Из этого получается:

$$BM = BD \cdot \frac{BE}{BA}$$

$$DM = BD - BM = BD \left(1 - \frac{BE}{BA} \right) = BD \cdot \frac{AE}{BA}$$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DB} \cdot AE = EB \cdot \frac{AD}{DB}$$

$$DM = BD \cdot \frac{EB \cdot AD}{BA \cdot DB} = 2AD \cdot \frac{BE}{BA}$$

$$\frac{1}{2} EF = AD \cdot \frac{BE}{BA}$$

3) Сравним полученные выражения:

DM и $\frac{1}{2} EF \Rightarrow$ получаем

$$DM = \frac{1}{2} EF$$

Ч.Т.Д

→ см. далее